

Horia Gârbea
Roxana Sălcianu



ELEMENTE DE REZISTENȚA MATERIALELOR

Partea a II-a

Curs universitar



eDidactica

CUPRINS

5	Cuvânt înainte
7	1. Solicități compuse
9	2. Încovoierea dublă sau oblică
11	3. Încovoierea cu forță axială
13	4. Compresiunea excentrică. Sâmburele central, zona activă
18	5. Încovoierea cu forță tăietoare
23	6. Îmbinările elementelor structurale din oțel
31	7. Calculul deplasărilor barelor elastice. Teoreme asupra sistemelor conservative
34	8. Metoda Mohr-Maxwell pentru calcul deplasărilor verticale și rotirilor
36	9. Calculul integralei Mohr-Maxwell cu regula lui Veresceaghin
40	10. Calculul deplasărilor barelor elastice prin metoda grinzilor conjugate
44	11. Structuri static nedeterminate
46	12. Ridicarea nedeterminării structurilor prin metoda eforturilor
51	13. Calculul grinzilor continue
60	14. Grinzi pe mediu elastic
63	Bibliografie

1. SOLICITĂRI COMPUSE

În fiecare secțiune a unui element structural sau de rezistență (considerat a fi o bară) solicitat prin efectul unor acțiuni și al reacțiunilor corespunzătoare, torsorul forțelor interioare se descompune în cele șase componente numite **eforturi sectionale**. Fiecare dintre ele crează una dintre cele cinci **solicitări simple**. În cazul în care într-o secțiune acționează un singur efort, iar celelalte sunt nule, se spune că elementul este supus unei solicitări simple. Dacă în secțiune apare doar forța axială N , elementul este solicitat la întindere sau la compresiune; dacă apare doar una dintre forțele tăietoare T_y sau T_z solicitarea este aceea de forfecare; dacă singurul efort este un moment încovoietor M_y sau M_z elementul este supus la încovoiere pură dreaptă, dacă în secțiune este prezent doar momentul de torsiune M_x solicitarea este cea de răsucire.

În majoritatea cazurilor reale, se remarcă însă prezența simultană în aceeași secțiune transversală a elementului (considerat a fi o bară) a două, trei sau mai multe eforturi. În acest caz, elementul este supus la **solicitări compuse**.

Studiul solicitărilor compuse se face prin determinarea eforturilor unitare produse de fiecare dintre solicitări. Ele se compun pentru a studia efectul lor maxim.

Solicitările compuse se împart în două categorii, după felul în care se pot combina eforturile unitare:

1. Solicitări compuse care produc eforturi unitare de aceeași natură și anume doar eforturi unitare normale σ sau doar eforturi unitare tangențiale τ . Astfel apar următoarele combinații de solicitări:

– încovoierea oblică – în secțiune apar eforturile sectionale moment încovoietor M_y și M_z . Ambele conduc la apariția eforturilor unitare normale σ .

– încovoierea cu forță axială – pe secțiune apar forța axială N și momentele încovoietoare M_y și M_z , toate conduc la apariția eforturilor unitare normale σ .

– întinderea sau compresiunea excentrică – este un caz particular de încovoiere cu forță axială.

– solicitarea de forfecare cu răsucire (torsiune) – apar simultan în secțiune o forță tăietoare T_y sau T_z și un moment de răsucire M_x , ambele producând eforturi unitare tangențiale.

Această solicitare compusă apare mai ales în cazul arcurilor elicoidale, nefiind specifică elementelor de construcții.

Respect pentru 2. Solicitări compuse care produc eforturi unitare de natură diferită, atât normale σ , cât și tangențiale τ . În studiul acestor solicitări este necesară utilizarea unei teorii de rezistență.

Exemplul care apare cel mai des în construcții este cel al grinzilor solicate la încovoiere cu forță tăietoare. La grinzile spațiale dar și la organele de mașini mai apare și încovoierea cu răsucire.

2. ÎNCOVOIEREA DUBLĂ SAU OBLICĂ

Dacă asupra unei grinzi acționează atât forțe verticale (în lungul axei y) cât și forțe orizontale (laterale, în lungul axei z), se pot trasa două diagrame de momente încovoietoare, câte una după fiecare axă.

Acest efect se produce practic, de regulă, prin aplicarea unor forțe a căror direcție trece prin centrul de greutate al secțiunii dar care sunt înclinate cu un unghi față de planul vertical al barei, xOy .

Într-o secțiune oarecare a grinzii, situată la o distanță (x) de reazem, momentul încovoietor rezultat M este înclinat cu unghiul α față de axa principală de inerție și va avea două componente M_z și M_y :

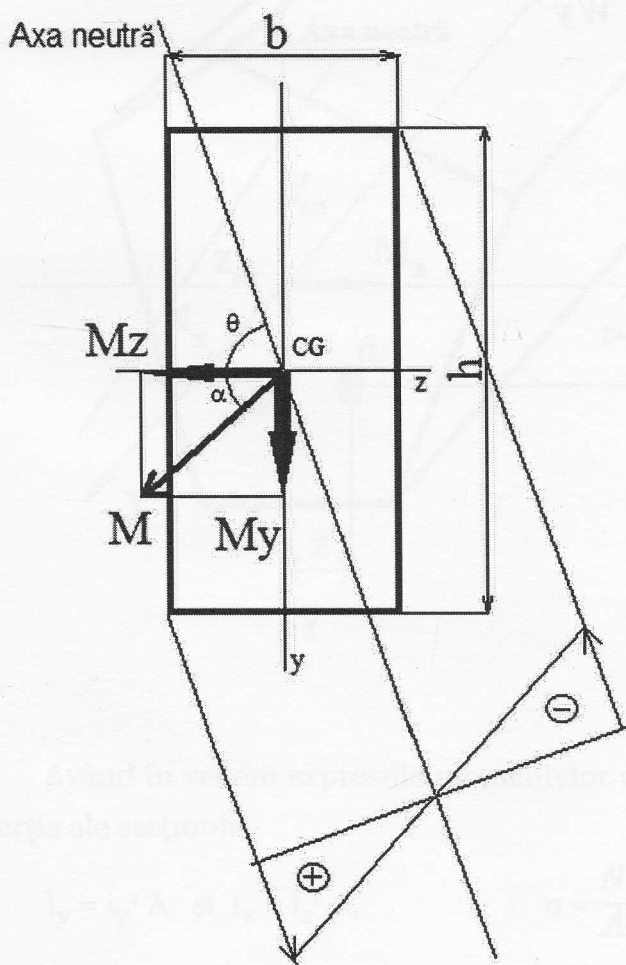
$$M_z = M \cos \alpha \text{ și } M_y = M \sin \alpha.$$

Se aplică formula lui Navier într-un punct oarecare al secțiunii, de coordonate z , y . Cele două componente ale momentului încovoietor produc eforturi unitare normale σ_z , σ_y astfel:

$$\sigma_z = \frac{M_z}{I_z} y \quad \sigma_y = \frac{M_y}{I_y} z$$

Fiind în teoria micilor deformații, se va putea utiliza metoda independenței acțiunilor și suprapunerii efectelor. Efortul unitar normal rezultat într-un punct al secțiunii, punct de coordonate y , z , va fi așadar suma celor două eforturi:

$$\sigma = \sigma_z + \sigma_y = \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z$$



Axa neutră a secțiunii este locul geometric al punctelor secțiunii în care efortul unitar normal este nul. Anulând expresia lui σ , se va determina ecuația axei neutre:

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z = 0,$$

așadar:

$$\frac{y}{x} = -\frac{M_y I_z}{M_z I_y} = -\frac{M \sin \alpha I_z}{M \cos \alpha I_y} = -\frac{\sin \alpha I_z}{\cos \alpha I_y} = -\operatorname{tg} \alpha \frac{I_z}{I_y}.$$

Axa neutră este o dreaptă care trece prin centrul de greutate CG al secțiunii, deci e o axă centrală înclinată cu unghiul θ față de axa forțelor care produc încovoierea, înclinată și ea.

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_z}{I_y}$$

La o secțiune dreptunghiulară cu laturile b și h , vom avea:

$$\sigma_{\max} = \sigma(b/2, h/2) = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}$$

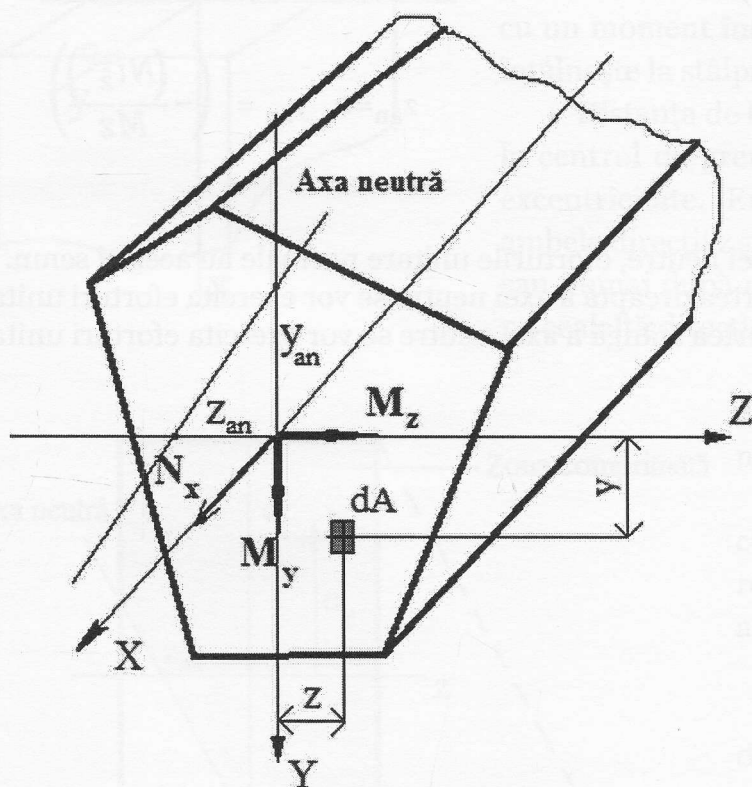
$$\sigma_{\min} = \sigma(-b/2, -h/2) = -\left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}\right).$$

3. ÎNCOVOIEREA CU FORȚĂ AXIALĂ

Încovoierea cu forță axială se produce atunci când în secțiunea unei grinzi apar eforturi de întindere (compresiune) și încovoiere. Eforturile N , M_y și M_z , conduc toate trei la apariția unor eforturi unitare normale. În cazurile obișnuite, fiind vorba de elemente masive, dacă pe secțiune ar acționa și forțe tăietoare, eforturile unitare tangențiale produse de acestea ar fi oricum relativ mici față de eforturile unitare

normale și pot fi considerate neglijabile.

Pe fiecare element infinitesimal dA al secțiunii, apare un efort unitar normal σ care este rezultanta celor trei eforturi secționale N , M_y și M_z , ca urmare a aplicării principiului suprapunerii efectelor, permisă de ipoteza micilor deformări:



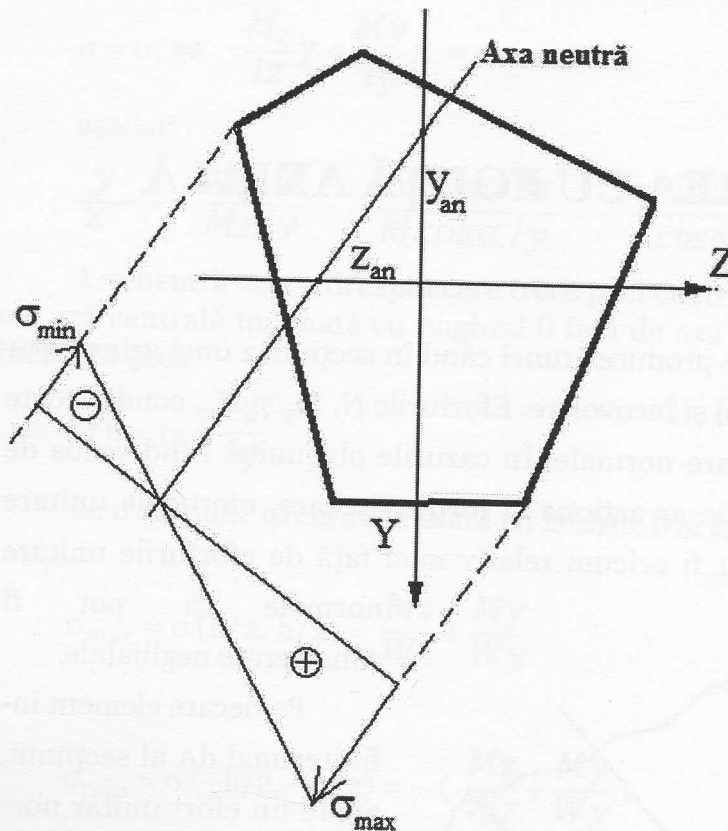
$$\sigma = \sigma(N) + \sigma(M_y) + \sigma_y(M_z)$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z + \frac{M_z}{I_z}y$$

Având în vedere expresiile momentelor de inerție axiale în funcție de razele de inerție ale secțiunii:

$$I_y = i_y^2 A \quad \text{și} \quad I_z = i_z^2 A,$$

$$\sigma = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{M_y}{N i_y^2} z + \frac{M_z}{N i_z^2} y \right).$$



Pentru a afla poziția axei neutre, se pune condiția $\sigma = 0$ și de aici:

$$\left(1 + \frac{My}{Ni_y^2}z + \frac{Mz}{Ni_z^2}y\right) = 0.$$

Axa neutră este, după cum se observă din ecuația de mai sus, o dreaptă care nu trece prin centrul de greutate al secțiunii.

Ea va tăia axele y și z în punctele:

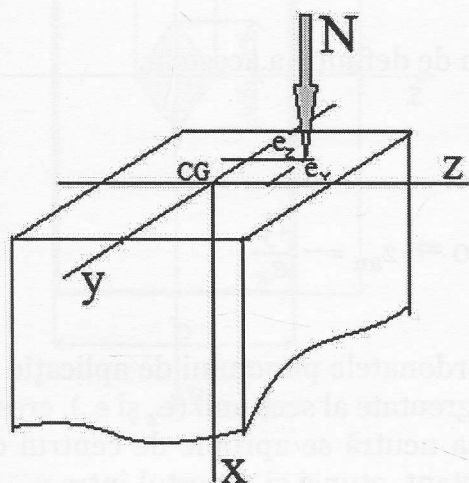
$$y_{an}=0, z_{an} = \left(-\frac{(Ni_y^2)}{Mz}\right)$$

$$z_{an}=0, y_{an} = \left(-\frac{(Ni_z^2)}{My}\right)$$

De o parte și de alta a axei neutre, eforturile unitare normale au același semn.

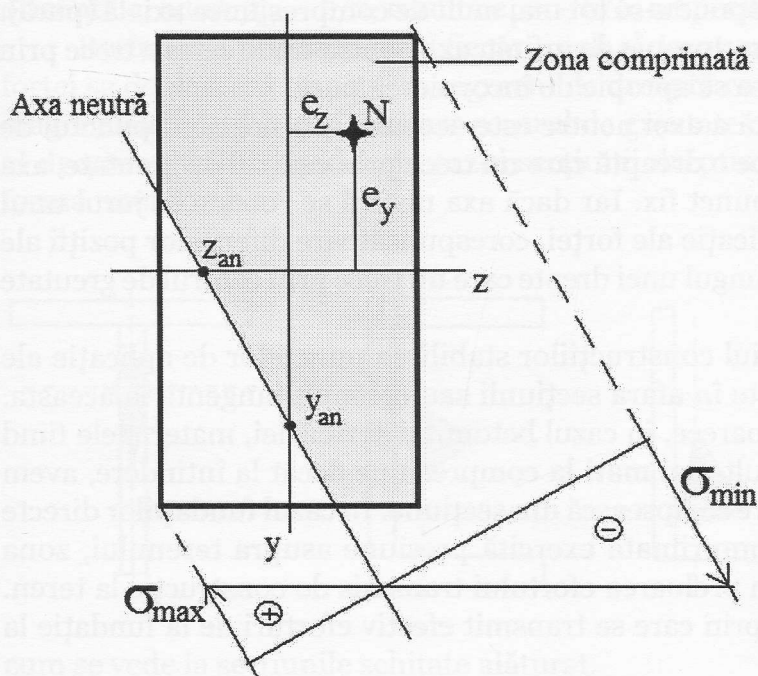
În cazul din figură, în partea dreaptă a axei neutre se vor exercita eforturi unitare normale de întindere iar în partea stângă a axei neutre se vor exercita eforturi unitare normale de compresiune.

4. COMPRESIUNEA EXCENTRICĂ. SÂMBURELE CENTRAL, ZONA ACTIVĂ



Un caz particular al încovoierii cu forță axială este compresiunea excentrică, provocată de o forță paralelă cu axa unei bare și care are punctul de aplicație în alt punct decât centrul de greutate sau de o forță aplicată centric simultan cu un moment încovoiător. Este un caz care se întâlnește la stâlpii și fundațiile construcțiilor.

Distanța de la punctul de aplicație al forței la centrul de greutate al secțiunii se numește excentricitate. Excentricitatea poate fi după ambele direcții z și y , axele centrale ale secțiunii, sau numai după una dintre ele, excentricitatea pe cealaltă direcție fiind nulă.



Se notează excentricitatea după cele două direcții ortogonale z și y cu e_z și e_y .

Dacă se reduce forța N în centrul de greutate al secțiunii, rezultă următoarele elemente ale torsorului de reducere:

- forța axială: N ,
- momentul încovoiător după axa y : $M_y = N e_z$,
- momentul încovoiător după axa z : $M_z = N e_y$,

Am scris aceste elemente în valoare absolută, este evident că ele produc compresiune de partea unde acționează forța și întindere în partea opusă axei